株価変動過程と売買符号のLong Memory(経済物理学とその周辺,統計数理研究所研究会共同研究集会,経済物理学2009-ミクロとマクロの架け橋-,京都大学基礎物理学研究所2009年度前期研究会,研究会報告)

AUTHOR(S):

黒田, 耕嗣; 増川, 純一; 村井, 浄信

株価変動過程と売買符号のLong Memory

黒田　耕嗣 (日本大学大学院総合基礎科学研究科),
増川純一 (成城大学経済学部)
村井浄信 (岡山大学大学院社会文化科学研究科)

1　イントロダクション

実証研究により, 株取引において売買符号の相関に Long Memory が存在することが Bouchard-Gefen et.al.[1], Lillo-Farmer et.al [2] 等により明らかになってきている。

すなわち, 買いの約定が成立するときそのときの売買符号を + で表し, 売りの約定が成立するとき売買符号を − で表す. このような売買符号の時系列を $S_1, S_2, \cdots$, とするとき,S_u と S_{u+t} との間の相関係数 $\rho(S_u, S_{u+t}) = \mathrm{Cov}(S_u, S_{u+t})/\sqrt{V[S_u]V[S_{u+t}]}$ は

$$\rho(S_u, S_{u+t}) \sim \frac{c}{t^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

をみたす.α の値は $0 < \alpha < 1$ でこの相関を t で積分すると発散する. このとき, S_u, S_{u+t} との間には Long Memory が存在するという.

株取引の売買符号の間には Long Memory が存在するが, 符号付出来高の間にも Long Memory が存在することが Bouchard 達によって示されている.([1] を参照) すなわち, 符号付出来高のプロセスは super diffusive となる. しかるに株価の変動の間には Long Memory が存在せず, そのプロセスは diffusive となる.

何故, 株価の変動プロセスには Long Memory が観測されないのであろうか？その一つの解釈は大口の約定がなされたときには, スプレッドの間に limit order が入り, 大口の market order で変化した株価を打ち消そうとする作用が働くからであると考えられる.limit order を入れるトレーダーがマーケット・メイカーの役割を果たすことにより株価を中心的な方向に引き戻しているという解釈である.

本稿では, この解釈を取り入れ, 株価変動と符号付出来高の離散時間プロセスを数学的にモデル化する. そして, それらのスケール極限を導くことによって, 株価のスケール極限プロセス X_t と符号付出来高のスケール極限プロセス Y_t が Brownian Motion と fractional Brownian Motion の重ねあわせ

$$\begin{aligned} X_t &= c_1 B_t^1 + c_2 B_t^H \\ Y_t &= c_3 B_t^2 + c_4 B_t^H \end{aligned}$$

としてえられることを示す. ここで, (B_t^1, B_t^2) は correlated Brownian Motion であり, B_t^H は Hurst index が H の fractional Brownian Motion である. fractional Brownian Motion の変動の間には Long Memory があることが知られており, 株価変動のプロセス X_t の fractional Brownian Motion 部分の係数 c_2 が十分に小さいことが確認されれば, 株価の変動プロセスの Long Memory の項は十分に小さいことが言える.

2 モデルの設定

時点集合 $\Lambda_n = \{1, \cdots, n\}$ を考え,Λ_n の各時点で株取引が行われるとする.

トレーダーを 2 つのグループに分ける. グループ A は market order を 1 回で出すトレーダーであり, グループ B のトレーダーは market order を 2 回に分けて出すトレーダーであるとする. このとき, 売買符号は同じであるとする.

グループ A のトレーダーは小口の, グループ B のトレーダーは大口のトレーダーを想定している.

グループ A のトレーダーの取引を

$$\mathbf{p} = (s, t, v, g, \bar{g})$$

で表わし, これをポリマーとよぶ. $s \in \{+, -\}$ は売買符号であり, $t \in \Lambda_n$ は取引が行われた時間を表し, $v > 0$ と $g > 0$ はそのときの出来高と株価変動の大きさを表している. また, $\bar{g}$ は次の market order が来るまでの時間にスプレッドに入る limit orders によって, market order による株価変動を打ち消す株価変動の巾を表している. したがって, このときの株価の変動量 $ch(\mathbf{p})$, 符号付出来高 $sv(\mathbf{p})$ はそれぞれ次のようになる:

$$ch(\mathbf{p}) = s(g - \bar{g}), \quad sv(\mathbf{p}) = sv$$

このとき，ポリマー $\mathbf{p}$ の出現強度を表す関数 $\varphi(\mathbf{p})$ を $\varphi(\mathbf{p}) = d_n \cdot P_m^A(v,g)P_L(\bar{g}|v,g)$ で与える．$d_n = \frac{c}{n^{1-\alpha}}$ は Λ_n におけるポリマーの密度をコントロールするもので，$P_M^A(v,g)$ は (v,g) の同時確率関数である．また，$P_L(\bar{g}|v,g)$ は market rder による出来高と株価変動巾が (v,g) であったという条件の下で，limit order による株価変動の打ち消し巾が $\bar{g}$ となる条件付確率関数である．

グループ B のトレーダーの取引を

$$\mathbf{p} = (s|t_1, v_1, g_1, \bar{g}_1|t_2, v_2, g_2, \bar{g}_2) \qquad (t_1 < t_2)$$

で表す．s は売買符号で，t_1, t_2 が同じ符号の market orders を入れる次官で，$v_i, g_i, \bar{g}_i (i = 1, 2)$ は前と同様に定められる．

ポリマー $\mathbf{p}$ の出現強度関数は次で定義される：

$$\varphi(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^{2} P_M^B(v_i, g_i)P_L(\bar{g}_i|v_i, g_i)\frac{1}{(t_2 - t_1)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

$P_M^B(v_i, g_i)$ はグループ B における (v_i, g_i) の確率関数であり，

$$\begin{aligned}
\varepsilon_B &= \int P_M^B(dv, dg)\int P_L(d\bar{g}|v,g)(g - \bar{g}),\ \gamma_B = \int P_M^B(dv, dg) \\
\delta_B^2 &= \int P_M^B(dv, dg)\int P_L(d\bar{g}|v,g)(g - \bar{g})^2,\ \eta_B^2 = \int P_M^B(dv, dg)v^2, \\
\lambda_B &= \int P_M^B(dg, dv)vg
\end{aligned}$$

とする．同様に A についても $\varepsilon_A, \gamma_A, \delta_A, \eta_A, \lambda_A$ が定義されるとする．後に ε_B の挙動が重要になる．

ポリマー同士は互いに独立に出現するとして，Λ_n における株取引全体がポリマーによって $\omega = (\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m)$ で表されるとき，その確率を次で定義する．

$$P(\omega) = \frac{1}{Z_n}\varphi(\mathbf{p}_1)\cdots\varphi(\mathbf{p}_m)$$

ここで，Z_n は確率の規格化定数である．

3 主要結果

$\omega = (\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_m)$ の下での, 時刻 t での株価を S_t, t までの符号付出来高の累積の和を W_t として, スケール・プロセスをそれぞれ,

$$X_t^{(n)} = \frac{S_{[nt]}}{c(n)}, \qquad Y_t^{(n)} = \frac{W_{[nt]}}{c(n)}$$

で定める. これは時間を n 倍で早送りし, 空間を $\frac{1}{c(n)}$ 倍に縮めながらビデオを見るという操作に対応する.

定理 $c(n) = n^{\frac{1}{2}\alpha}$ とするとき, $X_t^{(n)}, Y_t^{(n)}$ は次の X_t, Y_t に有限次元分布に意味で収束する.

$$\begin{aligned} X_t &= c_{11}B_t^1 + c_{12}B_t^2 + \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{2}}\varepsilon_B B_t^H \\ Y_t &= c_{21}B_t^1 + c_{22}B_t^2 + \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{2}}\gamma_B B_t^H \end{aligned}$$

ここで, B_t^1, B_t^2 は独立な Brownian Motion で B_t^H はこれらと独立な Hurst index $H = \frac{2-\alpha}{2}$ となる fractional Brownian Motion であり,

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 2c\delta_A^2 + a_2\delta_B^2, c_{21}^2 + c_{22}^2 = 2c\eta_A^2 + a_2\eta_B^2, c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 2c\lambda_A; a_2\lambda_B$$

である. さらに a_1, a_2 は次で与えられる:

$$a_1 = \frac{4c^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, \quad a_2 = \frac{4c^2}{1-\alpha}$$

この定理の証明は有限次元分布の特性関数の極限をを Abstract Polymer Expansion を用いて求めることによってえられる.

References

[1] Bouchaud J.-P., Gefen Y., Potters M. and Wyart M. (2004). Fluctuations and response in financial markets: the subtle nature of 'random' price changes. Quantitative Finance **4,** 176–190.

[2] Lillo, F. and Farmer, J.(2004). The Long Memory of the Efficient Market. Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics **8,** 1–33.

[3] Kuroda,K. and Murai,J. (2009),Progress of Theoretical Physics Supplement No.179,pp.26-37